

Title	代數方程式ノ根ノ限界ニ就テ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 260 p.21-p.24
Issue Date	1944-01-17
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75094
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1161. 代数方程式，根，限界ニ就キテ

春 水 博 (神戸高等
高船学校)

(定理) 實係數ヲ有スル n 次，代数方程式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ガ、角領域 $\frac{\pi}{n} > \alpha > \text{amp.}(z) > 0$ ニ於テ、根 z_0 ヲ
有スルトキ

$$M = \text{Max.}_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right| < \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

ナラバ

$$|Z_0| < 1$$

デアール。

(証明) $Z_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ トオケバ

$$\frac{\pi}{n} > \alpha > \theta > 0$$

コノ Z_0 ヲ $f(Z_0) = 0$ へ代入スレバ 左辺ノ虚数部ハ
0 トナリ、又 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ノ假定ニヨリ實数
ナル故

$$g(r) = a_0 \sin n\theta r^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin k\theta r^k = 0 \dots\dots (1)$$

$\pi > n\theta > 0$ ナルコトナリ $|\sin k\theta| = \sin k\theta$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ナル故、且ツ又

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| = |a_0| M$$

ナル故

$$(1) \text{ヨリ } |g(r)| \geq |a_0| \sin n\theta r^n - |a_0| M \sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta r^k$$

コノヲ、間接法ニヨリ $|Z_0| = r \geq 1$ トスレバ

$$r^n \geq r^k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

ナル故

$$|g(r)| \geq |a_0| \sin n\theta r^n - |a_0| M r^n \sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta$$

シカルニ

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

＋ル故

$$|g(r)| \geq |a_0| r^n \left(\sin n\theta - M \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\text{故} = |g(r)| \geq \frac{|a_0| r^n \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} - \sin \frac{(n-1)\theta}{2} M \right)$$

右辺の正 = 正ルヲキルニルルニハ $\frac{\pi}{n} > \alpha > \theta_1 > 0$ 正ルニベ
テ、 $\theta = \alpha$ 對シ

$$M < \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{(n-1)\theta}{2}}$$

正ル知ク M ヲトレバヨイ。ソレニハ右辺ノ最小値ヲ求ム
レバヨイ。

コノ不等式、右辺ヲ $h(\theta)$ トオキバ

$$h'(\theta) = \frac{\sin n\theta - n \sin \theta}{2 \sin^2 \frac{(n-1)\theta}{2}}$$

故 = $\frac{\pi}{n} > \alpha \geq \theta > 0$ 正ル $\theta = \alpha$ 對シ $h'(\theta) < 0$

故 = $h(\theta)$ ハ $\alpha \geq \theta > 0$ 正ルニ減小函数ナル故 $h(\theta)$ ハ
 $0 < \theta \leq \alpha$ 正ルニ $\theta = \alpha$ トキ最小値ヲ取ル。

$$\text{従ツテ} \quad M < \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

トスレバ $|g(r)| > 0$

是ハ $g(r) = 0$ ト矛盾スル。

矛盾ノ原因ハ $|Z_0| = r \geq 1$ デアルカラ $r < 1$

即チ $|Z_0| < 1$

————— (完) —————